Cavités résonnantes en acoustique

20 novembre 2005

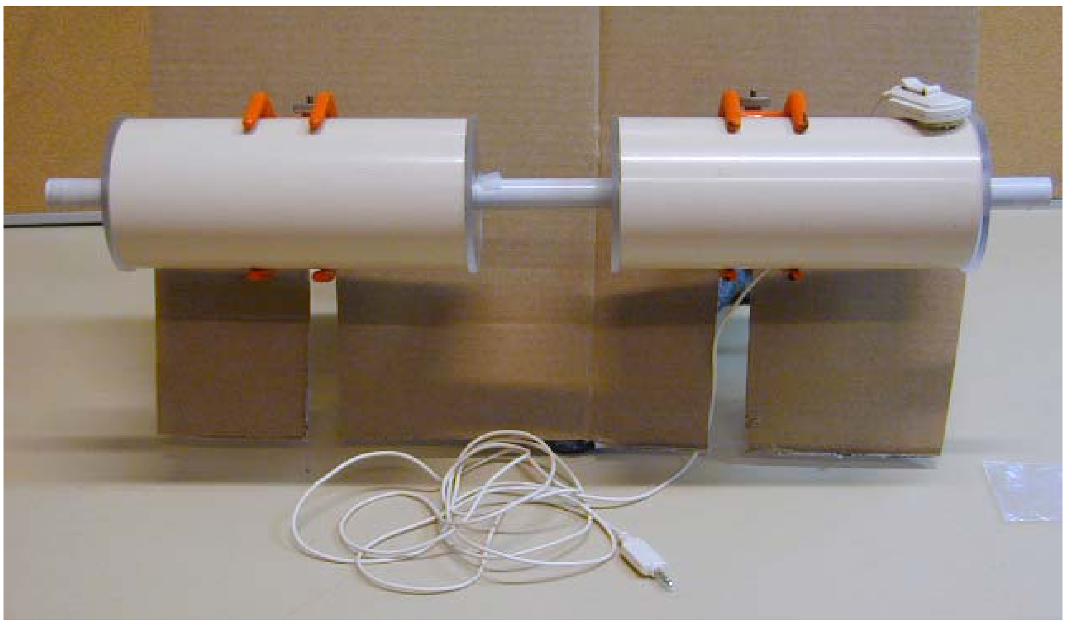

FIG. 1 – Photographie des dispositifs utilisés comme cavités résonnantes en acoustique.

Au cours de cette séance de TP, vous étudierez un résonateur simple en acoustique, qui illustre les propriétés générales de la résonance dans les systèmes linéaires. Vous monterez en particulier le lien entre les oscillations libres et la réponse du système à une excitation harmonique. Dans la deuxième partie du TP, vous étudierez la réponse de deux résonateurs couplés, et l'influence du cœfficient de couplage.

1 Présentation du résonateur de Helmholtz

1.1 Modèle théorique élémentaire

Considérons une cavité de grand volume interne V, terminée par un goulot de section S et de longueur l (figure 2). La pression à l'extérieur de la cavité est maintenue constante, égale à p_0.

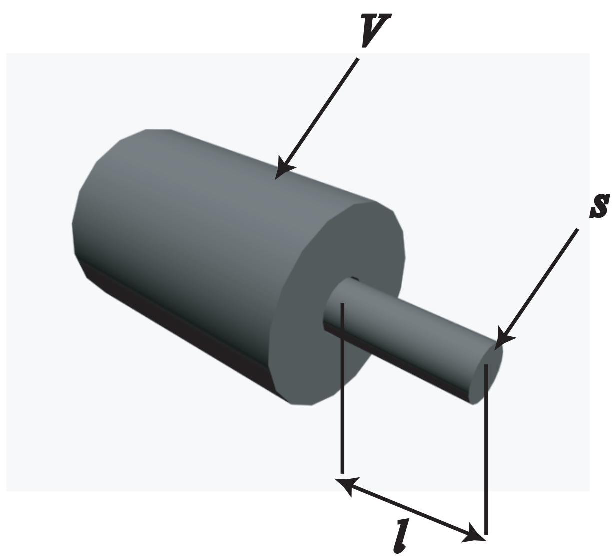

FIG. 2 – Schématisation d'un résonateur de Helmholtz.

Supposons dans un premier temps que le goulot soit obstrué par un bouchon de masse m, susceptible de coulisser à l'intérieur sans frottement (sa position par rapport à l'équilibre est notée x). Un exercice classique consiste à déterminer la fréquence des petites oscillations autour de la position d'équilibre, engendrées par les compressions et détentes adiabatiques dues au mouvement du bouchon. On obtient sans difficulté l'équation du mouvement :

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\frac{p_0S^2}{V}x = 0 .$$

La fréquence des petites oscillations donne donc accès à une mesure du paramètre γ de l'air[1]. Cette fréquence peut également s'exprimer en fonction de la masse volumique de l'air ρ_{air} et de la vitesse de propagation du son :

$$c_{\mathrm{s}} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S = \sqrt{\gamma\frac{p_0}{\rho_{\mathrm{air}}}}$$

d'où :

$$\omega = c_{\mathrm{s}}\sqrt{\frac{\rho_{\mathrm{air}}S^2}{mV}} . \qquad (1)$$

[1] Il s'agit en fait de la méthode de RÜCKHARDT de mesure du rapport C_P/C_V, qui fut mise au point en 1929.

1.2 Fréquence de résonance

Si on souffle dans une telle bouteille, on s'aperçoit qu'il est possible de la faire "ronfler" à une fréquence particulière. Par conséquent, il se produit près de l'embouchure une forte amplification du son pour certaines fréquences sensibles, et notamment pour une fréquence plus basse que les autres qui est aussi la plus renforcée.

À partir du calcul précédent, il est facile de justifier cette observation. On peut en effet assimiler le système à un système pendulaire oscillant avec une fréquence propre de résonance. L'air contenu dans le grand volume V se comporte comme un ressort. Il est fixé à une masse $m = \rho_{\text{air}} S l$, qui est l'air contenu dans le goulot de la bouteille de longueur l et de section S. En reportant cette masse dans l'expression (1) obtenue précédemment, on obtient immédiatement la valeur de la fréquence de résonance du système :

$$\omega_0 \;=\; c_{\text{s}} \sqrt{\frac{S}{Vl}}\;. \tag{2}$$

La théorie que nous venons de développer, et qui correspond aux approximations dites "de Helmholtz", comporte bien évidemment des simplifications excessives[2]. Détaillons certaines d'entre elles.

Si nous considérons l'air qui entre et qui sort dans la cavité, nous avons supposé que dès que les molécules d'air ont franchi la section S du goulot, elles trouvent devant elles de très larges sections et que par continuité, leur vitesse tombe aussitôt à une fraction négligeable de leur vitesse u dans le goulot. On remarque dans les expériences que la longueur l du col doit être remplacée par une longueur effective $l_{eff} = l + l_0$ où $l_0 = \frac{8d}{3\pi}$ avec d le diamètre du col.

Nous avons également implicitement supposé que toutes les molécules dans le goulot vibraient en phase avec la m ême vitesse instantanée u. Cette approximation est valable si la longueur d'onde

$$\lambda \;=\; 2\pi \sqrt{\frac{S/l}{V}}$$

qui ne dépend que de la géométrie du système étudié, est beaucoup plus grande que la longueur l du goulot (avec $\lambda \gg l$). Si on explore des fréquences nettement plus élevées que ω_0, on trouvera que certaines fréquences créant un régime d'ondes stationnaires à l'intérieur même de la cavité. De nouvelles résonances vont ainsi apparaître, dont les fréquences caractéristiques correspondent de manière approximative aux pulsations propres d'un tube acoustique de longueur $L + l$.

1.3 L'utilisation historique de ces résonateurs

Ce type de systèmes résonnants a historiquement été imaginé par Hermann VON HELMHOLTZ (figure 3) pour analyser la structure de sons composés, et pouvoir en extraire les différentes harmoniques. Comme montré sur la figure 4, on utilisait pour cela

[2] On trouvera une étude détaillée du résonateur de Helmholtz dans le livre de Yves ROCARD "*Dynamique générale des vibrations*", qui précise en particulier la validité de ces différentes hypothèses simplificatrices.

FIG. 3 – Hermann von HELMHOLTZ (Potsdam, 1821 – Charlottenburg, 1894) fut sans aucun doute l'un des grands savants du XIX^{e} siècle. D'abord médecin militaire à Potsdam, il professe l'anatomie et la physiologie à Kˆnigsberg (aujourd'hui Kaliningrad), à Bonn et à Heidelberg. En 1871, il est chargé de la chaire de physique théorique à l'Université de Berlin. S'il reste aujourd'hui surtout connu pour ses recherches sur l'audition et la vision et sur leurs rapports avec la physique, la stature, la créativité et l'autorité de Son *Excellenz von Helmholtz* dominèrent toute la physique allemande de son époque. Dans un mémoire écrit en 1847, il énonce le principe de conservation de l'énergie, en affirmant que les phénomènes physiques ne sont que des changements de forme de l'énergie et en introduisant la notion d'énergie potentielle. Il mesure avec précision la vitesse de l'influx nerveux (1850) et élabore un "Traité d'optique physiologique" (1856). Pour étudier l'intérieur de l'œil et observer la rétine, il met au point un ophtalmoscope qui est encore en usage aujourd'hui. En 1858, il est l'auteur de travaux sur l'hydrodynamique des tourbillons. Il oriente ensuite ses recherches vers l'acoustique et étudie en 1862 la nature du son. D'après sa théorie, le timbre d'un son résulte du nombre et de l'intensité des composantes harmoniques associées au son fondamental. Pour identifier ces harmoniques et faire l'analyse et la synthèse des sons complexes, il imagine les résonateurs qui portent son nom et dont on voit un modèle posé sur la table. À partir de 1870, il concentre son activité scientifique sur l'électrodynamique et oriente vers ce domaine les recherches de nombreux jeunes physiciens, dont en particulier Heinrich HERTZ. Pour interpréter les lois de Faraday sur l'électrolyse, HELMHOLTZ affirme en 1881 la nécessité d'attribuer à l'électricité comme à la matière une structure granulaire. Il fut également un grand administrateur de la science. Avec l'appui de Werner von SIEMENS, il bâtit et administra le Physikalisch-Technische Reichsanstalt de 1887 jusqu'à sa mort, en 1894. C'est dans ce fameux institut de métrologie, situé à Charlottenburg près de Berlin, que furent découvertes par Willy WIEN, Otto LUMMER et Heinrich RUBENS les lois du rayonnement du corps noir qui déterminent la répartition d'énergie lumineuse en fonction de la longueur d'onde. L'interprétation de cette loi grâce aux QUANTAS de Max PLANCK fut l'une des clés qui permit d'ouvrir le monde de la physique quantique.

une série de cavités sphériques de dimensions graduellement décroissantes, telles que leurs fréquences de résonance aillent en croissant d'une manière régulière. Ainsi, il était possible d'effectuer une sorte d'analyse de Fourier rudimentaire qui permette de connaître les divers sons simples entrant dans la composition d'un son complexe, par exemple musical.

FIG. 4 – Les sytèmes "antiques" de résonateur de Helmholtz sont form és d'une cavité sphérique S, présentant une ouverture AB, et, à l'opposé de cette ouverture, un petit appendice creux MN que l'on introduit dans l'oreille (a). Pour analyser un son, on se place de manière à bien l'entendre et on détermine, en plaçant successivement dans l'oreille les divers résonateurs (*cf.* (b)), quels sont ceux qui donnent la sensation d'un renforcement consid érable.

2 Travail expérimental à réaliser

On lira au préalable l'article joint en complément de ce texte de TP [3], dont l'expérience qui vous est proposée est directement inspirée.

Pour réaliser les expériences, on utilise le matériel suivant :

- Les cavités résonnantes, avec différentes longueurs du tuyau de sortie.
- Deux haut-parleurs permettant d'effectuer une excitation harmonique. Ces haut-parleurs sont placés en face du col du résonateur, et ils sont excités par un signal sinusoïdal provenant de la carte son d'un ordinateur portable.
- Un microphone, collé sur un trou de la plaque qui vient fermer la cavité, qui permet de détecter la surpression à l'intérieur de la cavité. L'enregistrement se fait grâce à la carte son de l'ordinateur portable.
- Des supports de hauteur variable.

2.1 Etude d'une cavité résonnante

- A l'aide du programme PROGSON [4], effectuer une excitation impulsionnelle du résonateur avec le haut-parleur placé à l'extrémité du col, le micro placé à l'autre extrêmité donnera l'enregistrement de la courbe de résonance. On choisira par exemple une excitation "SWIFT" d'une durée d'une seconde.

[3]F. BERNARDOT, J. BRUNEAUX et J. MATRICON "Un archétype d'oscillateur : le résonateur acoustique de Helmholtz", *Bulletin de l'Union des Physiciens* **96**, 1055–1075 (juin 2002).

[4]Le mode d'emploi de ce programme est décrit dans l'annexe du TP n°2 sur l'étude des ondes stationnaires et progressives dans une chaîne linéaire d'oscillateurs.

- Etudier la réponse du microphone dans les mêmes conditions expérimentales qu'avec le résonateur. Commentez le résultat.
- Mesurer la variation de la fréquence de résonance ν_0 pour différentes longueurs l du col, et tracer la courbe $\frac{1}{\nu_0^2} = f(l)$.
  Comparer les résultats obtenus avec les fréquences calculées à partir de la formule de l'Éq.(2) et celle incluant une longueur effective du col.
- Pour une longueur de col, enregistrer un spectre de résonance et en utilisant le programme IGOR, déterminer le facteur de qualité du résonateur. Déterminer les conditions expérimentales qui permettent d'obtimiser le facteur de qualité. Etudier particulièrement l'influence de la réponse du microphone.

2.2 Etude de cavités résonnantes couplées

2.2.1 Principe de l'expérience

Dans la suite du TP, on s'intéressera au comportement du système formé de deux résonateurs identiques, couplés entre eux par un tube de longueur h et de même section que le col cylindrique de chacun des résonateurs (figure 5).
Les courbes de résonances obtenues avec les cavités résonnantes couplées seront utilisées au cours du **TD 10 de Physique numérique - Modélisation de données d' expérience : résonateur de Helmholtz**.

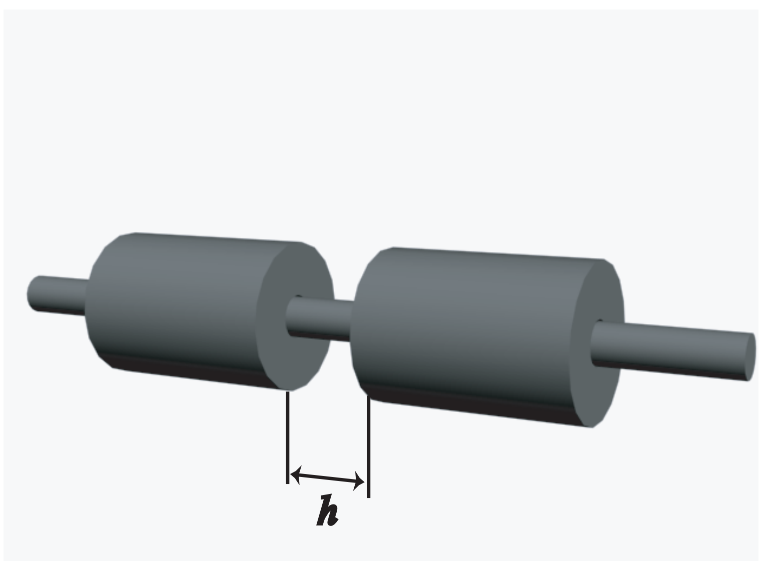

FIG. 5 – Représentation schématique de résonateurs de Helmholtz couplés.

2.2.2 Travail à effectuer

- En utilisant le programme PROGSON, montrer que la fréquence de résonance commune ν_0 est dédoublée en ν_+ et ν_-.
- Optimiser les conditions expérimentales pour obtenir des courbes exploitables en **Physique numérique**.

2.2 Etude de cavités résonnantes couplées

- Qu'observe-t-on pour une excitation impulsionnelle ?
- Pour étudier l'influence du cœfficient de couplage entre les deux résonateurs, tracer la variation de
$$\frac{1}{\nu_+^2 - \nu_-^2} = f(h) .$$
- En effectuant une excitation simultanée des deux résonateurs, soit en phase, soit en opposition de phase, au moyen de deux haut-parleurs, vérifier que ν_+ et ν_- correspondent aux fréquences de résonance des modes couplés symétriques et anti-symétriques.